



HF102-A - METAMATEMÁTICA

Programa:

Curso introdutório de Teoria de Categorias, em que são apresentadas as idéias básicas, comparando a visão matemática conceitual tradicional (conjuntista) com a visão diagramática desta teoria. É também analisada a teoria de Topos como generalização do universo conjuntista. Algumas aplicações da Teoria de Categorias à lógica contemporânea são também apresentadas, tais como a semântica de linguagens de ordem superior e a combinação categorial de lógicas.

Ementa:

Definindo conceitos usando flechas. Definição de categorias. Exemplos. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos. Dualidade. Construções básicas: objeto terminal e inicial, produtos e coprodutos, equalizadores e coequalizadores, pullback e pushout. Diagramas e cones. Limites e colimites. Exponenciais. Topos: Introdução. Fibrados e Feixes. Álgebra de subobjetos. Funtores. Adjunção. Transformações naturais. Categorias de funtores: Pré-feixes. Lema de Yoneda. Quantificadores como funtores adjuntos. Semântica de linguagens de primeira ordem em categorias. Teorias locais de conjuntos (local set theories) e linguagens de ordem superior. Teorema de completude das teorias locais de conjuntos com relação à semântica de topos. Interno vs. Externo. Linguagem de Mitchel-Bénabou. Semântica de Kripke-Joyal. Fibring de lógicas usando Teoria de Categorias.

Tópicos adicionais: Feixes sobre um espaço topológico. Feixes sobre um álgebra de Heyting completa. Topos de Grothendieck. Topos com objeto de números naturais. Números inteiros e números racionais num topos. Números reais num topos. Construção do feixe de números reais no topos de feixes sobre um espaço topológico.

Bibliografia:

- J.L. Bell. Toposes and Local Set theories: An Introduction. Oxford University Press, 1988.
R. Goldblatt. Topoi: The categorical Analysis of Logic. North-Holland, 1984 (second edition).
S. Mac Lane. Categories for the Working Mathematician. Springer, 1998 (second edition).
S. Mac Lane e I. Moerdijk. Sheaves in Geometry and Logic. Springer, 1992 (second printing).